Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего

образования «Севастопольский государственный университет»

Кафедра информационных систем

КУРСОВАЯ РАБОТА

ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

НА ТЕМУ:

«ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ИНФОРМАТИКЕ»

Пояснительная записка

RU.920101001.02463-01 81 08

Листов 31

Студента 2 курса группы ИС/б-21-о

направление подготовки 09.03.02

*(подпись)\_\_\_\_\_\_\_* Куркчи А.Э.

« » \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2015г.

Руководитель \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(должность, ученое звание, фамилия и инициалы)

Оценка: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Члены комиссии \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись) (фамилия и инициалы)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись) (фамилия и инициалы)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись) (фамилия и инициалы)

г. Севастополь – 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc438505608)

[1. Постановка задачи 4](#_Toc438505609)

[2. Ход работы 5](#_Toc438505610)

[2.1. Приближенное решение нелинейных уравнений 5](#_Toc438505611)

[2.2. Решение систем линейных уравнений прямимы и итерационными методами 7](#_Toc438505612)

[2.3. Численное интегрирование и дифференцирование функций 9](#_Toc438505613)

[2.4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений 11](#_Toc438505614)

[2.5. Одномерная оптимизация 15](#_Toc438505615)

[2.6. Многомерная оптимизация 17](#_Toc438505616)

[2.7. Методы обработки экспериментальных данных 18](#_Toc438505617)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 24](#_Toc438505618)

[БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 29](#_Toc438505619)

[Приложение А 30](#_Toc438505620)

[Приложение Б 31](#_Toc438505621)

Дата

Изм.

Лист

№ докум.

Подпись

Дата

Лист

2

КУРСОВАЯ РАБОТА

Выполнил

Куркчи А.Э.

Провер.

Дрозин А.Ю.

Н. Контр.

Утверд.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Лит.

Листов

31

Кафедра ИС

Группа ИС/б-21-о

ВВЕДЕНИЕ

Целью проведения курсовой работы является закрепление, углубление и обобщение знаний, получаемых во время обучения.

В связи с развитием новой вычислительной техники инженерная практика наших дней все чаще и чаще встречается с математическими задачами, точное решение которых получить весьма сложно или невозможно. В этих случаях обычно прибегают к тем или иным приближенным вычислениям. Численные методы дают приближенное решение задачи. Это значит, что вместо точного решения и (функции или функционала) некоторой задачи мы находим решение у другой задачи, близкое в некотором смысле (например, по норме) к искомому. Основная идея всех методов — дискретизация или аппроксимация (замена, приближение) исходной задачи другой задачей, более удобной для решения на ЭВМ, причем решение аппроксимирующей задачи зависит от некоторых параметров, управляя которыми, можно определить решение с требуемой точностью.

Полученные численными методами результаты обычно содержат погрешности, являясь лишь приближениями к искомым ответам. Вызвано это рядом объективных причин, среди которых есть не связанные непосредственно с методами вычислений. Погрешности появляются уже на первом этапе, ибо математическая модель задачи – это приближенное, идеализированное описание задачи на языке математики. Ради того, чтобы получаемая в итоге математическая задача оказалась доступной для дальнейших исследований, учитывают лишь наиболее важные параметры, условия и особенности исходной задачи. Понятно, что чем меньше факторов отбрасывается, тем точнее получается модель. Несмотря на приближенность результатов математического моделирования, без него в приложениях математики не обойтись. Оно представляет собой обязательную ступень при переходе от нематематической задачи к математической.

1. Постановка задачи
   1. Формирование навыков практических расчетов при решении нелинейных уравнений, изучить правила выбора начального приближения, критерии останова вычислений и условия сходимости методов ложного положения и Ньютона-Рафсона.
   2. Формирование навыков практических расчетов при решении систем линейных уравнений прямыми и итерационными методами, изучить правила выбора вектора начального приближения, критерии останова вычислений и условия сходимости методов простой итерации и Зейделя.
   3. Формирование навыков практических расчетов при дифференцировании и интегрировании функций методом построения линейных квадратурных формул, выявление особенностей применения формул трапеций и Симпсона, применением формул симметричной аппроксимации с остаточным членом при интерполировании по трем и пяти точкам.
   4. Формирование навыков решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и его модификацией, методом Рунге-Кутты.
   5. Формирование навыков определения наименьшего и наибольшего значения функции, решении методами половинного деления, средней точки и «золотого» сечения.
   6. Формирование навыков нахождения экстремума функции первого порядка градиентным методом.
   7. Формирование навыков использования метода наименьших квадратов.
2. Ход работы
   1. Приближенное решение нелинейных уравнений
      1. Графическое определение действительных корней уравнения

Дано уравнение с коэффициентами IMG0002_298092093 IMG0003_298092093 IMG0004_298092093График функции изображён на рисунке 2.1.

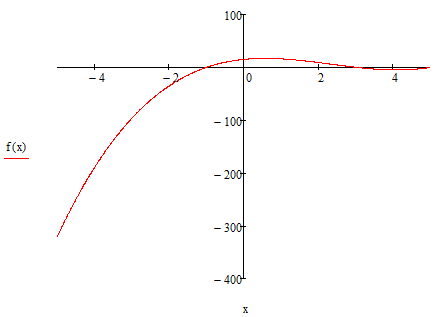


Рисунок 2.1 – График функции f(x)

Из графика видно, что приближенное значение корня – абсцисса точки пересечения графика функции с осью Ox, то есть x ∈ [-2, 0].

* + 1. Уточнение значения минимального по абсолютному значению корня уравнения, используя МЛП

При решении нелинейных уравнений, если известен интервал изоляции корня, его значение можно выяснить методом ложного положения. При этом неподвижный конец интервала изоляции выбирается исходя из условия Фурье: C:\Users\justnero\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\IMG0015_428383015.pngC:\Users\justnero\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\IMG0016_428383015.png

Тогда х0=b, и на каждом шаге значение х уточняется по формуле:

IMG0009_298092218(2.1.1)

Погрешность на каждом шаге вычисляется по формуле:

**** (2.1.2),гдеIMG0007_428383015.

Найти корень уравнения  методом ложного положения с точностью ε = 10-4 на отрезке [-2,0]. Так как f(a)<0, а f(b)>0, то на данном интервале график функции переходит через ось абсцисс. Последовательно найдем приближения.

IMG0019_428383015IMG0020_428383015IMG0023_428383015IMG0024_428383015IMG0027_428383015IMG0028_428383015IMG0031_428383015IMG0032_428383015IMG0035_428383015C:\Users\justnero\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\IMG0036_428383015.png

IMG0021_428383015IMG0022_428383015IMG0025_428383015IMG0026_428383015IMG0029_428383015IMG0030_428383015IMG0033_428383015IMG0034_428383015IMG0037_428383015C:\Users\justnero\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\IMG0038_428383015.png

На десятом приближении можно увидеть, что необходимая точность достигнута.

Ответ: число итераций – 10, C:\Users\justnero\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\IMG0036_428383015.png

Блок-схема алгоритма реализации алгоритма ложного положения приведена в приложении А.

* + 1. Уточнение значения минимального по абсолютному значению корня уравнения, используя МНР

Если корень уравнения f(x)=0 отделен, и f'(x) и f''(x) непрерывны и сохраняют определенные знаки на интервале [a,b], то для уточнения значения корня используют метод Ньютона-Рафсона. Первое значение х определяется из условия: f(b)f''(b)>0. На каждом шаге значение х уточняются по формуле:

IMG0027_298092218 (2.1.3)

А погрешность по формуле:

 (2.1.4)

Последовательно найдем приближения.

IMG0041_428383015IMG0042_428383015IMG0045_428383031IMG0046_428383031IMG0049_428383031IMG0050_428383031

IMG0043_428383015IMG0044_428383031IMG0047_428383031IMG0048_428383031IMG0051_428383031C:\Users\justnero\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\IMG0052_428383031.png

На шестом приближении можно увидеть, что необходимая точность достигнута.

Ответ: 6 итерации, C:\Users\justnero\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\IMG0050_428383031.png

Блок-схема алгоритма реализации алгоритма Ньютона – Рафсона приведена в приложении Б.

* 1. Решение систем линейных уравнений прямимы и итерационными методами

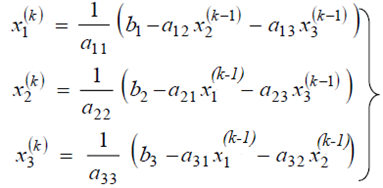
Рассматривается линейная система из трех уравнений с тремя неизвестными:

Расположим уравнения в порядке убывания их b. После этого записываем уравнения относительно x, y, z.

Первое приближение – x(0)=0, y(0)=0, z(0)=0.

* + 1. Метод простой итерации

Для решения СЛАУ этим методом используем формулы (2.2.1).

(2.2.1)

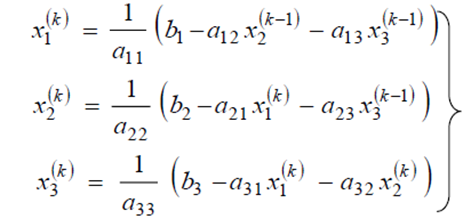
Используя первое приближение к решению системы вычисляем новое значение x, y, z. Далее, используя выше вычисленные значения и используем на следующем шаге итерации. Производим такие действия, пока не достигнута необходимая точность ε=10-4. В Таблице 1 представлены этапы вычисления. Видно, что для достижения нужной точности понадобилось 4 итерации.

Таблица 2.2.1 – Нахождение корней уравнения методом простых итераций.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| # | **x** | **y** | **z** | Dx | Dy | Dz | Dmax | ε |
| 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | - | - | 0,0001 |
| 1 | 0,81428571 | 1,92500000 | 2,71666667 | 0,81428571 | 1,92500000 | 2,71666667 | 2,71666667 |  |
| 2 | 0,80117857 | 2,00855357 | 2,68557143 | 0,01310714 | 0,08355357 | 0,03109524 | 0,08355357 |  |
| 3 | 0,79997105 | 2,00768241 | 2,68454476 | 0,00120753 | 0,00087116 | 0,00102667 | 0,00120753 |  |
| 4 | 0,79997785 | 2,00767108 | 2,68456443 | 0,00000680 | 0,00001133 | 0,00001967 | 0,00001967 |  |

* + 1. Итерационный метод Зейделя

Для решения СЛАУ этим методом используем формулы (2.2.2).

(2.2.2)

Используя первое приближение к решению системы вычисляем новое значение x(1). Далее вычисляют новое значение y(1), используя уже вычисленный x(1). Используя вычисленные значения x(1) и y(1), находим новое значение z(1). Производим такие действия, пока не достигнута необходимая точность ε=10-4. В Таблице 2 представлены этапы вычисления. Видно, что для достижения нужной точности понадобилось 4 итерации.

Таблица 2.2.2 – Нахождение корней уравнения итерационным методом Зейделя.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| # | **x** | **y** | **z** | Dx | Dy | Dz | Dmax | ε |
| 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | - | - | 0,0001 |
| 1 | 0,8142857 | 1,9066785 | 2,6858157 | 0,8142857 | 1,9066785 | 2,6858157 | 2,6858157 |  |
| 2 | 0,8012819 | 2,0076892 | 2,6845556 | 0,0130038 | 0,1010106 | 0,0012601 | 0,1010106 |  |
| 3 | 0,7999778 | 2,0076713 | 2,6845645 | 0,0013041 | 0,0000179 | 0,0000089 | 0,0013041 |  |
| 4 | 0,7999780 | 2,0076716 | 2,6845645 | 0,0000002 | 0,0000003 | 0,0000000 | 0,0000003 |  |

* 1. Численное интегрирование и дифференцирование функций
     1. Численное интегрирование функций

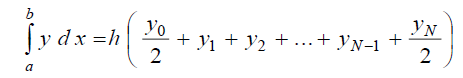
Дана подынтегральная функцияhttp://pastexen.com/i/2MXdFuSPd8.pngи 5 точек:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y=f(x) | Значения Хi | | | | | Значения Yi | | | | |
| X0 | X1 | X2 | X3 | X4 | Y0 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 |
| cos(x) | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 1,0000 | 0,9950 | 0,9801 | 0,9553 | 0,9211 |

Таблица 2.3.1 – Исходные данные.



Рассчитаем значение определенного интеграла p1 = , используя общую формулу трапеций (2.3.1).



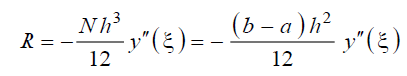
(2.3.1)

http://pastexen.com/i/W9SOFeN51C.png

(2.3.2)

Результат: h1 = 0,1; p1 = 0,389095.

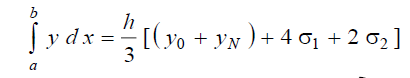
http://pastexen.com/i/Nh4zf365A5.pngПо формуле (2.3.3), где, рассчитаем значение остаточного члена определенного интеграла. За ξ примем значение 0,25.



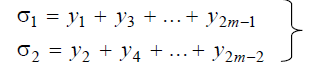
(2.3.3)

Результат: R1 = 0,000333.

Рассчитаем значение определенного интеграла p2 = , используя общую формулу Симпсона (3.4).



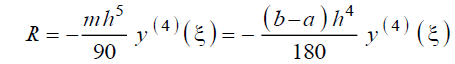
(2.3.4)



(2.3.5)

Результат: σ1 = 1,9503, σ2 = 0,9801, p2 = 0,389417.

По формуле (3.6) рассчитаем значение остаточного члена определенного интеграла.



(2.3.6)

Результат: R2 = -0,0000002.

Выполним расчеты по значениям подынтегральной функции в узлах x0, x2, x4 по тем же формулам.

Результат: h2 = 0,2, p3 = 0,388130, R3 = 0,001333; σ1 = 0,9801, σ2 = 0, p2 = 0,389433, R4 = -0,00000355.

Составим таблицу значений интеграла и сравним их.

Таблица 2.3.2 – Конечные результаты.

|  |  |
| --- | --- |
| Метод | Результат |
| - | 0,389418 |
| Трапеции (5 точек) | 0,389095 |
| Симпсона (5 точек) | 0,389417 |
| Трапеции (3 точек) | 0,388130 |
| Симпсона (3 точек) | 0,389433 |

* + 1. Численное дифференцирование функций

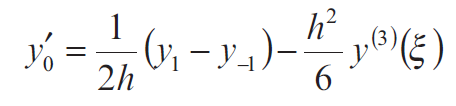
Пусть даны точки х0, х1, …, xn – равноотносящиеся, т.е. xi+1 – xi = h и пусть для функции y=y(x) известны значения yi = y(x) (i=0, 1, …, n-1).

Таблица 2.3.3 – Входные данные.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y=f(x) | Значения xi; yi | | | | |
| y=cos(x) | i-2 | i-1 | i | i+1 | i+2 |
| 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
|  | 1,0000 | 0,9950 | 0,9801 | 0,9553 | 0,9211 |

Вычислим значение h: h = 0,3 – 0,2 = 0,1.

Вычислим производную функции y = f(x) в центральном узле по формуле (3.7) (n=2). Расчеты выполним с 6-ю знаками после запятой.



(2.3.7)

За ξ примем значение 0,5 и найдем 1-5 производные функции y = f(x), которые будем использовать в последующих вычислениях.

Таблица 2.3.4 – Производные высших порядков.

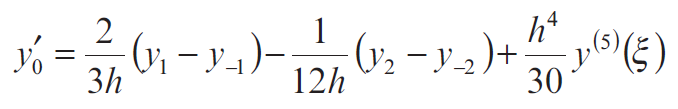
|  |  |
| --- | --- |
| Производная | Значение |
| y' | -sin(x) |
| y'' | -cos(x) |
| y''' | sin(x) |
| y'''' | cos(x) |
| y''''' | -sin(x) |

Найдем значение третьей производной в точке ξ: y'''(ξ) = 0,2474040.

Подставим найденные значения в формулу (2.3.7).

y'0 = -0,198912

Вычислим производную функции y = f(x) в центральном узле по формуле (3.8) (n=4). Расчеты выполним с 6-ю знаками после запятой.



(2.3.8)

Найдем значение третьей производной в точке ξ: y''''' = -0,2474040

Подставим найденные значения в формулу (2.3.8).

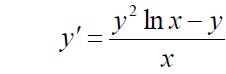
y'0 = -0,198917

Составим таблицу, где сравним полученные результаты с теоретическим значением производной.

Таблица 2.3.5 – Результаты.

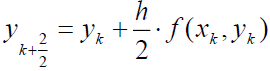
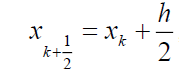
|  |  |
| --- | --- |
| Теоретическое значение | -0,198669 |
| n = 2 | -0,198912 |
| n = 4 | -0,198669 |

* 1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений
     1. Модифицированным методом Эйлера

Усовершенствованный метод Эйлера, когда сначала вычисляют промежуточные значения, является более точным по сравнению с классическим методом Эйлера.

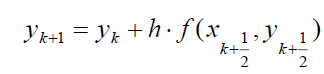
Нам дано дифференциальное уравнение , заданный интервал [1, 2], шаг h = 0.1 и начальное условие y0 = 1.

Для вычисления значений yk будем использовать 3 формулы:



(2.4.2)

(2.4.1)



(2.4.3)

Таблица 2.4.1 – Вычисление значений по усовершенствованному методу Эйлера.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| k | xk | yk | f(xk, yk) |
| 0 | 1,000 | 1,000000 | -1 |
| 0,5 | 1,050 | 0,950000 | -0,8628256 |
| 1 | 1,100 | 0,913717 | -0,7583136 |
| 1,5 | 1,150 | 0,875802 | -0,6683481 |
| 2 | 1,200 | 0,846883 | -0,5967665 |
| 2,5 | 1,250 | 0,817044 | -0,5344658 |
| 3 | 1,300 | 0,793436 | -0,4832823 |
| 3,5 | 1,350 | 0,769272 | -0,4382787 |
| 4 | 1,400 | 0,749608 | -0,4003859 |
| 4,5 | 1,450 | 0,729589 | -0,3667625 |
| 5 | 1,500 | 0,712932 | -0,3378969 |
| 5,5 | 1,550 | 0,696037 | -0,3120753 |
| 6 | 1,600 | 0,681724 | -0,2895569 |
| 6,5 | 1,650 | 0,667247 | -0,2692681 |
| 7 | 1,700 | 0,654798 | -0,2513444 |
| 7,5 | 1,750 | 0,642230 | -0,2350922 |
| 8 | 1,800 | 0,631288 | -0,2205782 |
| 8,5 | 1,850 | 0,620259 | -0,2073428 |
| 9 | 1,900 | 0,610554 | -0,1954138 |
| 9,5 | 1,950 | 0,600783 | -0,1844803 |
| 10 | 2,000 | 0,592106 | -0,1745479 |

Таким образом мы получили значения функций в точках x1, x2:

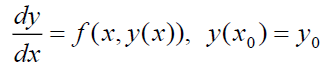
Таблица 2.4.2 – Результаты.

|  |  |
| --- | --- |
| xk | yk |
| 1,000 | 1,000000 |
| 1,100 | 0,913717 |
| 1,200 | 0,846883 |
| 1,300 | 0,793436 |
| 1,400 | 0,749608 |
| 1,500 | 0,712932 |
| 1,600 | 0,681724 |
| 1,700 | 0,654798 |
| 1,800 | 0,631288 |
| 1,900 | 0,610554 |
| 2,000 | 0,592106 |

* + 1. Метод Рунге-Кутты

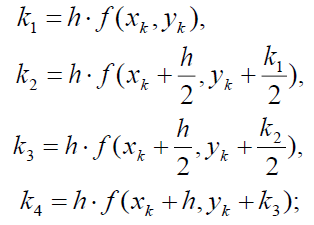
Нам дано дифференциальное уравнениеhttp://pastexen.com/i/G3wkkfj6wS.png, заданный интервал [1, 2,5], шаг h = 0.1 и начальное условие y0 = -2.

Метод Рунге-Кутты характеризуется повышенной точности и принадлежит к многошаговым методам численного интегрирования задачи Коши:



(2.4.4)

Пусть h– шаг интегрирования. Вычисление приближенного значения yk+1 при решении задачи Коши в точке xk+1 методом Рунге-Кутты заключается в выполнении операций, связанных с определением на каждом k-ом шаге коэффициентов:



(2.4.5)

и далее значений:

http://pastexen.com/i/CuApttFqlW.png

(2.4.6)

Таблица 2.4.3 – Расчет методом Рунге-Кутты.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | xk | yk | f(xk, yk) | f(xk+h/2, yk+k1/2) | f(xk+h/2, yk+k2/2) | f(xk+h, yk+k3) | k1 | k2 | k3 | k4 |
| 0 | 1,000000 | -2,000000 | 2,000000 | 1,985656 | 1,986472 | 1,946863 | 0,200000 | 0,198566 | 0,198647 | 0,194686 |
| 1 | 1,100000 | -1,801815 | 1,947441 | 1,888150 | 1,892141 | 1,817957 | 0,194744 | 0,188815 | 0,189214 | 0,181796 |
| 2 | 1,200000 | -1,613048 | 1,818594 | 1,734684 | 1,740894 | 1,650144 | 0,181859 | 0,173468 | 0,174089 | 0,165014 |
| 3 | 1,300000 | -1,439383 | 1,650791 | 1,557570 | 1,564825 | 1,470136 | 0,165079 | 0,155757 | 0,156482 | 0,147014 |
| 4 | 1,400000 | -1,283288 | 1,470746 | 1,378093 | 1,385461 | 1,294497 | 0,147075 | 0,137809 | 0,138546 | 0,129450 |

Продолжение таблицы 2.4.3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 1,500000 | -1,145082 | 1,295040 | 1,208481 | 1,215379 | 1,132111 | 0,129504 | 0,120848 | 0,121538 | 0,113211 |
| 6 | 1,600000 | -1,023834 | 1,132572 | 1,054654 | 1,060797 | 0,986790 | 0,113257 | 0,105465 | 0,106080 | 0,098679 |
| 7 | 1,700000 | -0,917997 | 0,987168 | 0,918613 | 0,923911 | 0,859320 | 0,098717 | 0,091861 | 0,092391 | 0,085932 |
| 8 | 1,800000 | -0,825804 | 0,859623 | 0,800141 | 0,804619 | 0,748858 | 0,085962 | 0,080014 | 0,080462 | 0,074886 |
| 9 | 1,900000 | -0,745504 | 0,749098 | 0,697908 | 0,701646 | 0,653803 | 0,074910 | 0,069791 | 0,070165 | 0,065380 |
| 10 | 2,000000 | -0,675471 | 0,653992 | 0,610126 | 0,613223 | 0,572295 | 0,065399 | 0,061013 | 0,061322 | 0,057229 |
| 11 | 2,100000 | -0,614255 | 0,572442 | 0,534916 | 0,537474 | 0,502484 | 0,057244 | 0,053492 | 0,053747 | 0,050248 |
| 12 | 2,200000 | -0,560593 | 0,502599 | 0,470494 | 0,472603 | 0,442668 | 0,050260 | 0,047049 | 0,047260 | 0,044267 |
| 13 | 2,300000 | -0,513402 | 0,442757 | 0,415253 | 0,416995 | 0,391337 | 0,044276 | 0,041525 | 0,041699 | 0,039134 |
| 14 | 2,400000 | -0,471759 | 0,391407 | 0,367794 | 0,369234 | 0,347188 | 0,039141 | 0,036779 | 0,036923 | 0,034719 |
| 15 | 2,500000 | -0,434881 | 0,347243 | 0,326915 | 0,328109 | 0,309111 | 0,034724 | 0,032691 | 0,032811 | 0,030911 |

Таким образом мы получили значения функций в точках:

Таблица 2.4.4 – Результат.

|  |  |
| --- | --- |
| xk | yk |
| 1 | -2,000000 |
| 1,1 | -1,801815 |
| 1,2 | -1,613048 |
| 1,3 | -1,43938 |
| 1,4 | -1,28329 |
| 1,5 | -1,14508 |
| 1,6 | -1,02383 |
| 1,7 | -0,918 |
| 1,8 | -0,8258 |
| 1,9 | -0,7455 |
| 2 | -0,67547 |
| 2,1 | -0,61425 |
| 2,2 | -0,56059 |
| 2,3 | -0,5134 |
| 2,4 | -0,47176 |
| 2,5 | -0,43488 |

* 1. Одномерная оптимизация
     1. Алгоритм Свена

Шаг 1. Вычислить f(x0); f(x0+h); f(x0-h); k = 1;

Шаг 2. Если f(x0+h) < f(x0), то x1 = x0+h, перейти к шагу 5

Шаг 3. Если f(x0-h) < f(x0), то h = -h; x1 = x0+h, перейти к шагу 5

Шаг 4. a = x0-h; b = x0+h; конец

Шаг 5. Если f(xk-1) <= f(xk), то перейти к шагу 7

Шаг 6. k = k+1; h = 2h; xk+1 = xk +h; перейти к шагу 5

Шаг 7. Если xk-1 < xk+1, то a = xk-1; b = xk+1; конец

Шаг 8. a = xk+1; b = xk-1; конец

Дана функция f(x)=x2+2. Нам требуется найти точку экстремума (min по заданию) с точностью ε = 0,2. За x0 примем значение x0 = 1 и шаг h = 2.

Шаг 1:

Вычисляем значение функции в точке x0 , (x0+h) и (x0-h).

Таблица 2.5.1 – Значения функции в точках.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | x | f(x) | f(x0+h) | f(x0-h) |
| 1 | 1 | 3 | 11 | 3 |

Шаг 2:

Так как не выполняется условие f(x0+h) < f(x0), то переходим к шагу 3.

Шаг 3:

Так как не выполняется условие f(x0-h) < f(x0), то переходим шагу 4.

Шаг 4:

a = x0-h = -1; b = x0+h = 3

Следуя этому алгоритму, мы нашли начальную длину отрезка, которая содержит точку минимума.

* + 1. Дихотомический поиск (метод деления отрезка пополам)

Метод относится к последовательным стратегиям и позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации ровно половину текущего интервала неопределенности. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность.

Алгоритм:

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности L0 = [a0, b0] и требуемую точность ε>0

Шаг 2. Положить k=0.

Шаг 3. Вычислить среднюю точку , длину интервала и значение функции в средней точке .

Шаг 4. Вычислить точки: , , а также значения функции в этих точках: , .

Шаг 5. Сравнить значения и :

а) если f(yk) < , исключить интервал , положить . Средней точкой нового интервала становится точка yk:. Перейти к шагу 7.

б) если ≥ , перейти к шагу 6.

Шаг 6. Сравнить значения и :

а) если < , исключить интервал , положить . Средней точкой нового интервала становится точка . Перейти к шагу 7.

б) если ≥ ,, исключить интервалы: , положить . Средней точкой нового интервала остается точка . Перейти к шагу 7.

Шаг 7. и проверить условие окончания:

a) если , процесс поиска заканчивается и . В качестве приближения можно взять середину этого интервала .

б) если , то положить k=k+1 и перейти к шагу 4.

Все этапы вычисления приведены в Таблице 2.5.2.

Таблица 2.5.2 – Вычисление интервала дихотомическим поиском.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | ak | bk | L | x0 | yk | zk | f(y) | f(z) | f(x0) |
| 1 | -1,000 | 3,0000 | 4,0000 | 1,00000 | 0,00000 | -2,00000 | 2,000000 | 6,000000 | 3,000000 |
| 2 | -1,000 | 1,0000 | 2,0000 | 0,00000 | -0,50000 | -1,50000 | 2,250000 | 4,250000 | 2,000000 |
| 3 | 0,000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,50000 | 0,25000 | -0,25000 | 2,062500 | 2,062500 | 2,250000 |
| 4 | 0,000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,25000 | 0,12500 | -0,12500 | 2,015625 | 2,015625 | 2,062500 |
| 5 | 0,000 | 0,2500 | 0,2500 | 0,12500 | 0,06250 | -0,06250 | 2,003906 | 2,003906 | 2,015625 |
| 6 | 0,000 | 0,1250 | 0,1250 | 0,06250 | 0,03125 | -0,03125 | 2,000977 | 2,000977 | 2,003906 |
| 7 | 0,000 | 0,0625 | 0,0625 | 0,03125 |  |  |  |  |  |

Следовательно точка минимума функции находится в интервале .

В качестве приближения можно взять середину этого интервала , f(x\*) = 2,001.

* 1. Многомерная оптимизация

Алгоритм метода:

1. Начальный этап

Задать .

Найти градиент функции в произвольной точке   
Положить k=0.

2. Основной этап

Шаг 1. Вычислить

Шаг 2. Проверить выполнение критерия останова

а) если критерий выполнен, расчет окончен,

б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 3, если k=0, иначе к шагу 4.

Шаг 3. Определить

Шаг 4. Определить

Шаг 5. Определить

Шаг 6. Вычислить величину шага tk из условия

Шаг 7. Вычислить

Шаг 8. Положить k= k +1 и перейти к шагу 1.

Дана функция , начальные условия x0 = 7, y0 = 6 и задана точность ε = 0,25

Найдем градиенты заданной функции. Будет два градиента, т.к. переменных в уравнении две. Градиентами будут являться частные производные функции по x и по y.

Дальнейшие вычисления представлены в Таблице 2.6.1.

Таблица 2.6.1 – Нахождение экстремума функции.

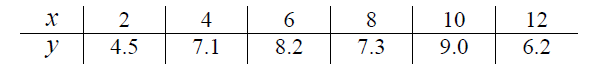
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | f(xk) | ∇f(xk) | ||∇f(xk)|| | b(k-1) | dk | tk |
| 0 | 7 | 34 | -10 | 27,85678 | - | 10 | 0,08584 |
| 6 | 26 | -26 |
| 1 | 7,8584 | 0,693805312 | 0,64416 | 0,690251 | 0,000614 | -0,63802 | 2,91264 |
| 3,76816 | 0,248 | -0,26396 |
| 2 | 6,000077 | 0,00000246 | 0,0028349 | 0,007562 |  |  |  |
| 2,99933 | -0,007011 |  |

Вычисления останавливаем, когда выполняется критерий останова .

Следовательно, точка минимума имеет координаты x\* = 6,00077, f(x\*) = 2,99933.

* 1. Методы обработки экспериментальных данных

Пусть некоторая функция задана таблицей значений:



* + 1. Методы обработки экспериментальных данных

Возьмем приближающуюся функцию в виде

Т.е. будем аппроксимировать эту таблично заданную функцию линейной зависимостью.

Тогда сумма квадратов отклонений - невязка имеет вид:

(2.7.1)

В методе наименьших квадратов значение функции (2.7.1) должно быть минимальным, а в точке минимума функции нескольких переменных частные производные этой функции по независимым параметрам равны 0. Следовательно условия минимума запишутся таким образом:

(2.7.2)

После несложных преобразований следующую систему двух линейных алгебраический уравнений с двумя неизвестными, где n – количество точек (в нашем случае )

(2.7.3)

Для нахождения наилучших параметром методом наименьших квадратов решим систему (2.7.3).

Составим таблицу исходных значений точек x и y, а также значений и . Нижняя строка таблицы – сумма столбцов.

Таблица 2.7.1 – Исходные значения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | x^2 | x\*y |
| 2 | 4,5 | 4 | 9 |
| 4 | 7,1 | 16 | 28,4 |
| 6 | 8,2 | 36 | 49,2 |
| 8 | 7,3 | 64 | 58,4 |
| 10 | 9 | 100 | 90 |
| 12 | 6,2 | 144 | 74,4 |
| 42 | 42,3 | 364 | 309,4 |

Решим систему уравнений (7.3) матричным методом. Для этого составим матрицу коэффициентов А и матрицу свободных членов В. Затем составим обратную матрицу матрицы А.

Чтобы получить a и b перемножим обратную матрицу А-1 на матрицу свободных членов В. Получаем значение коэффициентов: a = 0,19, b = 5,72.

Составим таблицу со значениями y табличными, у линейными (т.е. теми, которые получены при подстановке коэффициентов и соответствующих значений х в функция F), значениями d отклонений, которые являются разностями между табличным значением y и значением y, вычисленным по аппроксимирующей функции (y линейное), и квадратов отклонений. Далее вычислим сумму квадратов отклонений d - невязку.

Таблица 2.7.2 – Расчетные значения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| y | y линейное | d | d^2 |
| 4,5 | 6,1 | -1,6 | 2,56 |
| 7,1 | 6,48 | 0,62 | 0,3844 |
| 8,2 | 6,86 | 1,34 | 1,7956 |
| 7,3 | 7,24 | 0,06 | 0,0036 |
| 9 | 7,62 | 1,38 | 1,9044 |
| 6,2 | 8 | -1,8 | 3,24 |
|  |  |  | 9,888 |

Изобразим графически найденную линейную функцию и функцию, построенную по табличным значениям.

Рисунок 2.7.1 – Табличная и линейная функции.

* + 1. Аппроксимация табличных данных квадратичной функцией

Возьмем приближающую функцию в виде

Тогда невязка имеет такой вид:

(2.7.4)

И система для нахождения a, b, c представляет собой систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

(2.7.5)

Составим таблицу исходных значений точек x и y, а также значений x2, x3, x4, x\*y и x2\*y. Нижняя строка таблицы – сумма столбцов

Таблица 2.7.3 – Исходные значения.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | x^2 | x^3 | x^4 | x\*y | x^2\*y |
| 2 | 4,5 | 4 | 8 | 16 | 9,00 | 18 |
| 4 | 7,1 | 16 | 64 | 256 | 28,40 | 113,6 |
| 6 | 8,2 | 36 | 216 | 1296 | 49,20 | 295,2 |
| 8 | 7,3 | 64 | 512 | 4096 | 58,40 | 467,2 |
| 10 | 9 | 100 | 1000 | 10000 | 90,00 | 900 |
| 12 | 6,2 | 144 | 1728 | 20736 | 74,40 | 892,8 |
| 42 | 42,3 | 364 | 3528 | 36400 | 309,4 | 2686,8 |

Решим систему уравнений (2.7.5) матричным методом. Для этого составим матрицу коэффициентов А и матрицу свободных членов В. Затем составим обратную матрицу матрицы А-1.

Чтобы получить a, b и c перемножим обратную матрицу А-1 на матрицу свободных членов В. Получаем значение коэффициентов: a = -0,11, b = 1,7275, c = 1,62.

Составим таблицу со значениями y табличными, у квадратичных(т.е. теми, которые получены при подстановке коэффициентов и соответствующих значений х в функция F), значениями d отклонений, которые являются разностями между табличным значением y и значением y, вычисленным по аппроксимирующей функции (y квадратичное), и квадратов отклонений. Далее вычислим сумму квадратов отклонений d - невязку.

Таблица 2.7.4 – Расчетные значения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| y | y кв | d | d^2 |
| 4,5 | 4,635714 | -0,13571 | 0,018418367 |
| 7,1 | 6,772857 | 0,327143 | 0,107022449 |
| 8,2 | 8,031429 | 0,168571 | 0,028416327 |
| 7,3 | 8,411429 | -1,11143 | 1,235273469 |
| 9 | 7,912857 | 1,087143 | 1,181879592 |
| 6,2 | 6,535714 | -0,33571 | 0,112704082 |
|  |  |  | 2,683714286 |

Изобразим графически найденную квадратичную функцию, линейную функцию и функцию, построенную по табличным значениям.

Рисунок 2.7.2 – Табличная, линейная и квадратичная функции.

Из рисунка 2.7.2 и таблицы 2.7.4 видно, что значения найденной квадратичной функции и табличные значения совпадают с достаточно высокой точностью, а также, что найденная квадратичная функция больше подходит для описания данной по заданию зависимости точек (невязка квадратичной функции меньше невязки линейной функции).

Значит функция описания зависимости заданных точек выглядит так:

y = -0,11\*x2+1,7275\*x + 1,62

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения практического задания №1 были изучены алгоритмы практических расчетов при решении нелинейных уравнений. Были изучены правила выбора начального приближения, критерии останова вычислений и условия сходимости методов ложного положения и Ньютона-Рафсона.

Графическое определение действительных корней уравнения является простейшим методом нахождения приближенного значения корня уравнения, но он не дает результата высокой точность, поэтому мы можем определить к какому промежутку относится корень заданного уравнения.

После проведений расчетов можно сделать вывод, что самым быстрым в реализации оказался алгоритм Ньютона-Рафсона, так как нужная точность была достигнута на четвёртой итерации, в то время как при алгоритме ложного положения только на шестой. Однако, следует отметить, что при реализации алгоритма Ньютона-Рафсона может возникнуть сложность с нахождением производной функции.

В процессе выполнения практического задания №2 были сформированы навыки практических расчетов решения систем линейных уравнений методом простых итераций и итерационным методом Зейделя.

Метод простой итерации — один из простейших численных методов решения уравнений. численный метод решения математических задач, приближённый метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Суть такого метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения (являющегося более точным). Метод позволяет получить значения корней системы с заданной точностью.

Итерационный метод Зейделя является модификацией метода простых итераций, где после задания начального приближения х(0) вместо параллельного итерирования производится последовательное итерирование, причем на каждой итерации в каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений. Используя этот метод, мы можем достигнуть заданной точности за меньшее количество итераций, чем при методе простых итераций.

Для данной системы линейных алгебраических уравнений мы достигли заданной точности в первом и втором методе за 4 итерации.

В процессе выполнения практического задания №3 были сформированы навыки практических расчетов при дифференцировании и интегрировании функций методом построения линейных квадратурных формул, выявление особенностей применения формул трапеций и Симпсона, применением формул симметричной аппроксимации с остаточным членом при интерполировании по трем и пяти точкам.

После нахождения интеграла двумя методами с 5, а затем с 3 точками была составлена таблица результатов, где найденные значения сравниваются с теоретическим значением. Видно, наиболее близким оказался метод Симпсона с 5 точками. Также можно сделать вывод, что увеличение количества точек приводит к уточнению, и тем самым улучшению, результата интегрирования.

При дифференцировании с 2 и 4 точками мы получили значения близкие к теоретическому. Однако при увеличении количества точек с 2 до 4 мы получаем более сложную формулу для вычисления, однако это увеличивает и точность результата.

В процессе выполнения практического задания №4 были сформированы навыки практических расчетов при решении обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и его модификацией, методом Рунге-Кутты.

Метод Рунге-Кутта по сравнению с методом Эйлера имеет на порядок меньшую погрешность, однако более сложен в использовании. При меньших требованиях к точности метод Эйлера даст результат сравнимой точности за меньшее количество операций.

В процессе выполнения практического задания №5 были сформированы навыки определения наименьшего значения функции, решении методом половинного деления, условия окончания вычислений.

В методе Свенна уменьшение длины отрезка, содержащего точку минимума, достигалось путем последовательного исключения частей этого отрезка. Величина интервала, исключаемого на каждом шаге, зависит от расположения двух пробных точек внутри отрезка. Поскольку координата точки минимум заранее неизвестна, целесообразно размещать пробные точки таким образом, чтобы обеспечивать уменьшение длины отрезка в одном и том же отношении.

Алгоритм дихотомического поиска (метод деления отрезка пополам) основан на анализе значений функции в трех точках, равномерно распределенных на текущем интервале (делящих его на четыре равные части). Поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины. Ввиду медленной сходимости этот метод редко используется для нахождения значения корня, обычно его применяют для локализации корня с дальнейшим уточнением значения корня каким-либо другим методом.

В практическом задании №6 была проанализированная функция двух переменных и при помощи метода многомерной оптимизации, в частности метода сопряженных градиентов, была найдена точка минимума.

Градиентом функции многих переменных f(x) называется вектор, составленный из первых частных производных функции по всем переменным. Метод сопряженных градиентов формирует направления поиска, в большей мере соответствующие геометрии минимизируемой функции. Это существенно увеличивает скорость их сходимости и позволяет, например, минимизировать квадратичную функцию. Одной из наиболее существенных проблем в методах сопряженных градиентов является проблема эффективного построения направлений. Метод Флетчера-Ривса решает эту проблему путем преобразования на каждом шаге антиградиента.

В практическом задании №7 были изучены методы обработки экспериментальных данных, в частности метод минимальных квадратов. Результаты вычислений показали, что надо выбирать тот тип кривой, который более походит на форму исходного графика множества точек.

Метод наименьших квадратов (часто называемый МНК) обычно упоминается в двух контекстах. Во-первых, широко известно его применение в регрессионном анализе, как метода построения моделей на основе зашумленных экспериментальных данных. При этом помимо собственно построения модели обычно осуществляется оценка погрешности, с которой были вычислены её параметры, иногда решаются и некоторые другие задачи.

Большое количество численных методов ставит актуальной задачей не столько создание новых, сколько исследование и классификацию старых, выявление лучших. Анализ влияния ошибок показал, что между лучшими методами нет принципиальной разницы с точки зрения устойчивости к ошибкам округления.

Недостаток аналитических методов – использование целого ряда допущений и предположений в процессе построения математических моделей и невозможность, в некоторых случаях, получить решение в явном виде из-за неразрешимости уравнений в аналитической форме, отсутствия первообразных для подынтегральных функций и т.п. В этих случаях широко применяются численные методы.

Численные методы основываются на построении конечной последовательности действий над числами. Применение численных методов сводится к замене математических операций и отношений соответствующими операциями над числами, например, к замене интегралов суммами, бесконечных сумм – конечными и т.п. Результатом применения численных методов являются таблицы и графики зависимостей, раскрывающих свойства объекта. Численные методы являются продолжением аналитических методов в тех случаях, когда результат не может быть получен в явном виде. Численные методы по сравнению с аналитическими методами позволяют решать значительно более широкий круг задач.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Оникс 21 век, 2005. – 400 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 432 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512с.
4. Фильчаков П.В. Справочник по высшей математике. - Киев: Наукова думка, 1975. - 500с.
5. Пирумов У.Г. Численные методы / У.Г. Пирумов. – М.: Дрофа, 2003. – 224 с.
6. Методы безусловной многомерной оптимизации: Рек. к выполнению лаб., практ. и курсовых работ/ Сост.: С.А. Шипилов: НФИ КемГУ. – Новокузнецк. 2000.- 31 с.

# Приложение А

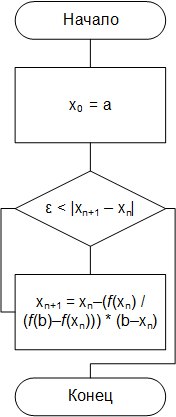


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма реализации алгоритма ложного положения.

# Приложение Б

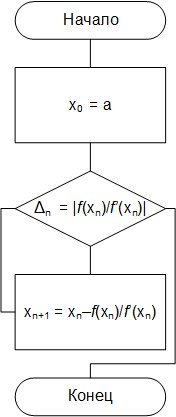


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма Ньютона-Рафсона.